

Interação e acoplamento modal na análise de cascas cilíndricas

Lourival Júnio Fonseca Dias^{1,a}, Frederico Martins Alves da Silva^{2,b}

Universidade Federal de Goiás, 74605-220, Brasil

^aljfdias@hotmail.com, ^bsilvafma@eec.ufg.br

PALAVRAS-CHAVE: Casca cilíndrica, acoplamento modal, caminho pós-crítico, interação modal.

1 INTRODUÇÃO

Existem diversas aplicações de cascas cilíndricas e na engenharia civil, essas aplicações são notadas, por exemplo, em coberturas, reservatórios e silos. Apesar de ter uma forma geométrica simples, uma casca cilíndrica pode apresentar um complexo comportamento não-linear, quando submetida a uma excitação externa. Devido aos avanços teóricos e numéricos, a dinâmica não-linear de cascas tem apresentado notáveis progressos. Uma das principais motivações para o estudo do comportamento estático e dinâmico destas estruturas é a grande diferença encontrada entre os resultados teóricos e experimentais além dos frequentes acidentes reportados na literatura.

As equações diferenciais que descrevem os sistemas físicos reais são não-lineares e aproximações para torná-las lineares são comumente utilizadas, pois se pretende que a estrutura trabalhe em um regime linear. Para sistemas estruturais esbeltos como cascas cilíndricas, essa aproximação pode ser extremamente grosseira e os fenômenos não-lineares associados à vibração das cascas se tornam difíceis de serem avaliados.

Nesse sentido é necessário o desenvolvimento de modelos matemáticos que sejam simultaneamente precisos (correto acoplamento modal) e de baixa dimensão (pequeno número de graus de liberdade) e que permitem uma análise paramétrica detalhada do comportamento local e global das estruturas esbeltas. Particularmente, as abordagens mais comuns são o uso de modos normais não-lineares (Shaw e Pierre, 1993), o método das forças normais (Nayfeh, 1993), a decomposição de Karhunen-Loève (Sirovich, 1987a, b, c) e técnicas de perturbação (Gonçalves e Batista, 1988; Gonçalves e Del Prado, 2004, 2005, Gonçalves *et al.* 2008).

O fenômeno de acoplamento modal é outro tópico importante de estudo na teoria da estabilidade de estruturas. Embora existam muitos trabalhos publicados sobre acoplamento modal na presença de cargas estáticas, sua influência no comportamento dinâmico tem sido objeto de poucos estudos. No estudo da instabilidade estática e dinâmica de sistemas estruturais sempre houve uma

¹ Orientando

² Orientador

ênfase na procura de modelos de baixa dimensão capazes de representar ao menos de forma qualitativa o comportamento do sistema. Esta busca é particularmente importante na análise de sistemas dinâmicos não-lineares. Na análise de cascas cilíndricas esta busca levou à criação de vários modelos aproximados, que por sua vez geraram uma série de respostas qualitativamente e quantitativamente distintas, o que tem causado diversos debates quanto à maneira de se modelar o problema.

Ao contrário das vigas e placas que apresentam frequências naturais bem espaçadas, as cascas cilíndricas podem apresentar frequências próximas, ou mesmo iguais, para modos de vibração distintos. Essa proximidade torna-se ainda maior quando se considera um carregamento estático compressivo. Isto faz com que haja mesmo para nível baixo de carregamento dinâmico, uma superposição das regiões de instabilidade paramétrica. Quando se considera o efeito de não-linearidade, há então a possibilidade de interação entre os modos não-lineares, o que pode causar mudanças significativas nas fronteiras de instabilidade e nos diagramas de bifurcação (Gonçalves e Del Prado, 2004, 2005).

Neste trabalho, tem-se como objetivo deduzir uma solução modal para os deslocamentos transversais da casca cilíndrica utilizando a técnica de perturbação. A solução modal encontrada deve considerar tanto o acoplamento modal entre os modos não-lineares quanto a interação modal entre os dois modos de vibração mais próximos.

2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Cascas cilíndricas são definidas como elementos estruturais cuja distância entre qualquer ponto interno da mesma e a superfície média da casca é pequena se comparada com as outras dimensões que definem esta estrutura.

Para este trabalho, a casca será considerada como uma estrutura circular perfeita constituída de material elástico, homogêneo e isotrópico, cujas dimensões serão definidas como raio a , comprimento L e espessura h , e tendo como propriedades físicas um módulo de elasticidade E , coeficiente de Poisson ν e densidade ρ .

Na Figura 1 estão representadas as dimensões que definem a casca cilíndrica assim como o campo de deslocamentos u , v e w , que representam os respectivos deslocamentos nas direções axial, x , circunferencial, θ , e transversal, z , da casca cilíndrica.

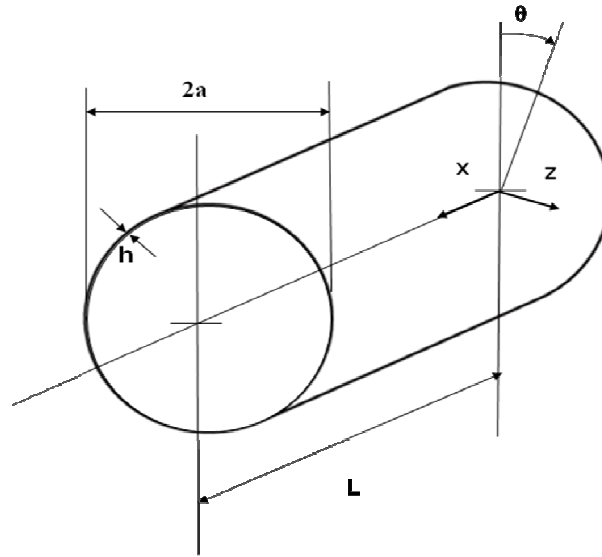


Figura 1. Parâmetros geométricos, sistema de coordenadas e campo de deslocamento da casca cilíndrica

Para a determinação das equações de equilíbrio e de compatibilidade da casca cilíndrica, essenciais no estudo dos fenômenos de acoplamento e interação modal, são necessários inicialmente a definição de um campo de deformações e mudanças de curvatura. No presente trabalho será utilizada a teoria não-linear de Donnell para cascas abatidas, que define o campo de deformações e mudanças de curvatura através das seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 & \varepsilon_\theta &= \frac{v_{,\theta} + w}{a} + \frac{1}{2a^2} w_{,\theta}^2 & \gamma_{x\theta} &= \left(\frac{u_{,\theta}}{a} + v_{,x} \right) + \frac{w_{,x} w_{,\theta}}{a} \\
 \kappa_x &= -w_{,xx} & \kappa_\theta &= -\frac{w_{,\theta\theta}}{a^2} & \kappa_{x\theta} &= -\frac{w_{,x\theta}}{a}
 \end{aligned} \tag{1}$$

onde ε_x , ε_θ e $\gamma_{x\theta}$ correspondem as deformações específicas da superfície média. κ_x , κ_θ e $\kappa_{x\theta}$ correspondem as mudanças de curvatura da superfície média da casca.

As deformações específicas em um ponto qualquer da casca podem ser escritas em função das deformações específicas e das mudanças de curvatura da superfície média:

$$\bar{\varepsilon}_x = \varepsilon_x + z \kappa_x \quad \bar{\varepsilon}_\theta = \varepsilon_\theta + z \kappa_\theta \quad \bar{\gamma}_{x\theta} = \gamma_{x\theta} + 2z \kappa_{x\theta} \tag{2}$$

onde $\bar{\varepsilon}_x$, $\bar{\varepsilon}_\theta$ e $\bar{\gamma}_{x\theta}$ correspondem as deformações médias em um ponto qualquer, que são válidas para o intervalo $-h/2 \leq z \leq h/2$.

Através da Lei de Hooke generalizada é possível obter as equações referentes a tensão

média em um ponto qualquer ao longo da espessura da casca, que a partir das deformações médias descritas na equação (2), definem $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_\theta$ e $\bar{\tau}_{x\theta}$, como apresentado nas equações abaixo:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\bar{\epsilon}_x + \nu \bar{\epsilon}_\theta) \quad \bar{\sigma}_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}(\bar{\epsilon}_\theta + \nu \bar{\epsilon}_x) \quad \bar{\tau}_{x\theta} = \frac{E}{2(1-\nu)} \bar{\gamma}_{x\theta} \quad (3)$$

onde $\bar{\sigma}_x$ e $\bar{\sigma}_\theta$ representam, respectivamente, a tensão normal na direção axial e circunferencial, e $\bar{\tau}_{x\theta}$ corresponde a tensão cisalhante no plano $x-\theta$ que atuam na casca cilíndrica.

A partir da equação (3) é possível determinar os esforços de membrana, obtidos a partir das seguintes integrais:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_x dz \quad N_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_\theta dz \quad N_{x\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{x\theta} dz \quad (4)$$

onde N_x , N_θ e $N_{x\theta}$ são as resultantes dos esforços de membrana.

Ainda, através da equação (3), é possível definir os esforços de flexão, através das seguintes integrais:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_x z dz \quad M_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_\theta z dz \quad M_{x\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{x\theta} z dz \quad (5)$$

onde M_x , M_θ e $M_{x\theta}$ representam os esforços de flexão da casca.

Resolvendo as integrais expressas nas equações (4) e (5), os resultados para os esforços de membrana e de flexão são dados por:

$$\begin{aligned} N_x &= C(\epsilon_x + \nu \epsilon_\theta) & N_\theta &= C(\epsilon_\theta + \nu \epsilon_x) & N_{x\theta} &= C(\epsilon_x + \nu \epsilon_\theta) \\ M_x &= D(\kappa_x + \nu \kappa_\theta) & M_\theta &= D(\kappa_\theta + \nu \kappa_x) & M_{x\theta} &= D(1-\nu)\kappa_{x\theta} \end{aligned} \quad (6)$$

onde $C = Eh^2/(1-\nu^2)$ representa a rigidez de membrana e $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ a rigidez de flexão da casca cilíndrica.

Ao realizar o somatório das forças e dos momentos na casca para um elemento

infinitesimal na configuração deformada, é possível obter as equações de equilíbrio não-linear da casca. As equações obtidas por esta operação são apresentadas a seguir (Brush e Almroth, 1975):

$$aN_{,xx} + N_{x\theta,\theta} = 0 \quad (7a)$$

$$aN_{x\theta,x} + N_{\theta,\theta} = 0 \quad (7b)$$

$$D\nabla^4 w + \frac{1}{a}N_{\theta} - \left(N_x w_{,xx} + \frac{2}{a}N_{x\theta} w_{,x\theta} + \frac{1}{a^2}N_{\theta} w_{,\theta\theta} \right) = 0 \quad (7c)$$

onde $\nabla^4 w = w_{,xxxx} + \frac{2}{a^2}w_{,xx\theta\theta} + \frac{1}{a^4}w_{,\theta\theta\theta\theta}$.

A partir da função de Airy, é possível demonstrar como variam os esforços de membrana ao longo da casca cilíndrica, essas funções são definidas a partir das seguintes equações:

$$N_x = f_{,\theta\theta} \quad N_{\theta} = a^2 f_{,xx} \quad N_{x\theta} = -a f_{,x\theta} \quad (8)$$

Segundo a teoria da elasticidade, é possível obter a seguinte equação de compatibilidade:

$$\frac{1}{a^2}\epsilon_{x,\theta\theta} + \epsilon_{\theta,xx} - \frac{1}{a}\gamma_{x\theta,x\theta} = 0 \quad (9)$$

A função de Airy, aliada a equação de compatibilidade, são fundamentais na solução do sistema de equações não-lineares de equilíbrio da casca dadas em (7), pois a função de Airy atende automaticamente as equações (7a) e (7b).

Em um primeiro momento, as deformações específicas apresentadas na equação (1) são substituídas na equação de compatibilidade, dada pela equação (9), obtendo-se a seguinte equação:

$$\frac{1}{a^2}\epsilon_{x,\theta\theta} + \epsilon_{\theta,xx} - \frac{1}{a}\gamma_{x\theta,x\theta} = \frac{1}{a^2}w_{,x\theta}^2 + \frac{1}{a}w_{,xx} - \frac{1}{a^2}w_{,xx}w_{,\theta\theta} \quad (10)$$

Em seguida, os esforços de membrana representados na equação (6), serão substituídos por suas respectivas funções de Airy, o que permitirá a obtenção de novas equações de deformação, que serão inseridas na equação geral de compatibilidade (9), obtendo então a seguinte equação:

$$\frac{1}{a^2} \varepsilon_{x,\theta\theta} + \varepsilon_{\theta,xx} - \frac{1}{a} \gamma_{x\theta,x\theta} = \frac{a^2}{Eh} \left(\frac{f_{,\theta\theta\theta\theta}}{a^4} + f_{,xxxx} + \frac{2}{a^2} f_{,xx\theta\theta} \right) \quad (11)$$

Igualando a equação (10) e (11), obtém-se então a equação de compatibilidade da casca, representada abaixo:

$$\nabla^4 f - \frac{Eh}{a^4} (w_{,x\theta}^2 - w_{,xx} w_{,\theta\theta} + a w_{,xx}) = 0 \quad (12)$$

Finalmente, é possível reescrever equação não-linear de equilíbrio (7c), após a substituição da função de tensão de Airy, como:

$$D \nabla^4 w + a f_{,xx} - (f_{,\theta\theta} w_{,xx} - 2 f_{,x\theta} w_{,x\theta} + f_{,xx} w_{,\theta\theta}) = 0 \quad (13)$$

3 RESULTADOS

A equação não-linear de equilíbrio da casca assim como a equação de compatibilidade representadas, respectivamente, pelas equações (13) e (12) são utilizadas na determinação dos fenômenos de acoplamento e interação modal da casca cilíndrica.

3.1 Acoplamento modal

Para o estudo do acoplamento modal será feita uma análise não-linear estática. A casca cilíndrica analisada encontra-se apoiada nas extremidades, onde as suas condições de contorno serão devidamente atendidas. Essa casca será então considerada com as seguintes propriedades geométricas e físicas: $a = 0,2$ m, $L = 0,4$ m, $h = 0,002$ m, $E = 210$ GPa e $\nu = 0,3$.

De acordo com o método da perturbação é possível determinar soluções modais para o deslocamento transversal da casca cilíndrica apoiada, dada por (Gonçalves *et al.*, 2008):

$$\begin{aligned}
w = & \sum_{i=1,3,5}^{\infty} \sum_{j=1,3,5}^{\infty} \zeta_{ij} h \cos(in\theta) \operatorname{sen}\left(j \frac{m\pi x}{L}\right) \\
& + \sum_{\alpha=0,2,4}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{\infty} \zeta_{\alpha(2+6\beta)} h \cos(\alpha n\theta) \times \\
& \left[-\frac{(3+6\beta)}{(4+12\beta)} \cos\left(6\beta \frac{m\pi x}{L}\right) + \cos\left((2+6\beta) \frac{m\pi x}{L}\right) - \frac{(1+6\beta)}{(4+12\beta)} \cos\left((4+6\beta) \frac{m\pi x}{L}\right) \right]
\end{aligned} \tag{14}$$

Esse método consiste basicamente em um somatório infinito. Logo são escolhidas três soluções distintas, dadas pelas equações (15), (16) e (17), onde o número de graus-de-liberdade (G.D.L.) do sistema aumenta a partir do aumento no número de modos na equação (14).

$$w = \zeta_{11} h \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(n\theta) \tag{15}$$

$$w = \zeta_{11} h \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(n\theta) + \zeta_{02} h \left[-\frac{3}{4} + \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{4m\pi x}{L}\right) \right] \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
w = & \zeta_{11} h \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(n\theta) \\
& + \zeta_{02} h \left[-\frac{3}{4} + \cos\left(2m \frac{\pi x}{L}\right) - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{4m\pi x}{L}\right) \right] \\
& + \zeta_{22} h \left[-\frac{3}{4} + \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{4m\pi x}{L}\right) \right] \cos(2n\theta)
\end{aligned} \tag{17}$$

onde, m e n correspondem respectivamente as ondas circunferenciais e semi-ondas longitudinais ao longo da casca cilíndrica sendo o conjunto (m, n) denominado como modo de flambagem ou de vibração a depender da análise que pode ser estática ou dinâmica, respectivamente. As soluções modais apresentadas obedecem corretamente as condições de contorno de uma casca cilíndrica simplesmente apoiada, a saber:

$$\begin{aligned}
w(0, \theta) &= 0 \\
w(L, \theta) &= 0 \\
w_{,xx}(0, \theta) &= 0 \\
w_{,xx}(L, \theta) &= 0
\end{aligned} \tag{18}$$

Inicialmente, a casca será submetida a uma determinada carga axial P aplicada nas extremidades da casca, $x = 0$ e $x = L$. Na Tabela 1 segue os valores das cargas críticas com seus respectivos modos de flambagem.

Tabela 1. Valores das cargas críticas e modos de flambagem da casca cilíndrica

m	n	$P/P_{crit(1,5)}$
1	4	1,400
1	5	1,000
1	6	1,179

A partir da Tabela 1 verificou-se que a menor carga crítica ocorre para o modo (1,5), logo os valores mostrados foram normalizados com relação ao $P_{crit(1,5)}$. A carga crítica corresponde ao instante na qual a casca estará na iminência de sofrer flambagem.

A seguir determina-se o caminho pós-crítico da casca cilíndrica que corresponde a representação do comportamento da casca após atingir a carga crítica. A Figura 2 corresponde ao caminho pós-crítico para o modo (1,5) para cada uma das soluções modais.

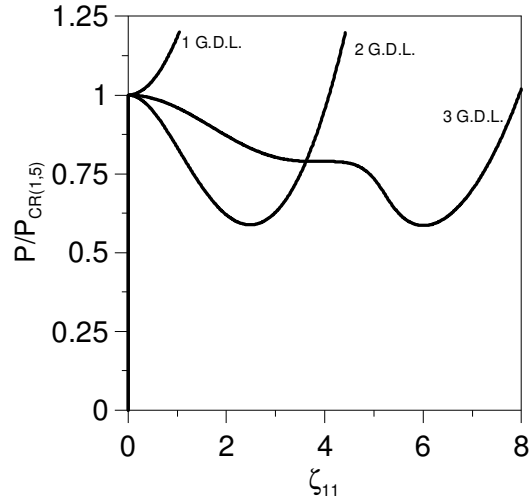


Figura 2. Caminho pós-crítico da casca cilíndrica para o modo de flambagem (1,5)

Ao analisar a Figura 2 é possível notar que o aumento no número de G.D.L. proporciona a obtenção de diferentes caminhos pós-crítico. Quando tem-se 1 G.D.L. (equação (15)) não é possível obter o real comportamento da casca cilíndrica, pois após atingir a carga crítica a mesma ganha rigidez, aumentando a capacidade de carga. Sendo assim, é feito o acréscimo do número de G.D.L. para que a avaliação desse comportamento seja mais próximo do real. Logo, é possível

verificar que para 2 G.D.L. (equação (16)) e 3 G.D.L (equação (17)) há uma perda de rigidez na casca, evidenciado pela perda da capacidade de carga, correspondendo assim ao comportamento real sofrido pela mesma. A concavidade da curva sofre alteração quando há uma mudança de 2 G.D.L. para 3 G.D.L., sendo essa alteração explicada pelo acréscimo de um termo assimétrico, ζ_{22} , na solução modal. Em síntese, esse fenômeno corresponde ao acoplamento modal entre os termos das soluções (15), (16) e (17).

3.2 Interação modal

O estudo do fenômeno de interação modal é feito a partir de uma análise não-linear dinâmica, mantendo a casca apoiada nas extremidades. Para isto, a equação de equilíbrio deve ser modificada, sendo igualada ao termo de inércia conforme a equação abaixo:

$$D\nabla^4 w + af_{,xx} - (f_{,\theta\theta}w_{,xx} - 2f_{,x\theta}w_{,x\theta} + f_{,xx}w_{,\theta\theta}) = \rho h a^2 \ddot{w} \quad (19)$$

Ao manter os parâmetros físicos e geométricos estabelecidos na análise não-linear estática, foi possível determinar a frequência natural (ω_b) e os modos de vibração da casca. Na Tabela 2, segue esses valores encontrados para os modos (1,5) e (1,6). Para a obtenção dessas frequências naturais da casca cilíndrica a amplitude modal ζ_{11} é substituída por uma função harmônica do tipo $\cos(\omega_b t)$. Em seguida, deverá ser feita a substituição destes parâmetros na equação de equilíbrio (19) linearizada juntamente com a equação (15).

Tabela 2. Valores da frequência natural e carga crítica para $L = 0,4$ m

m	n	ω_b (rad/s)	P_{crit} (kN)
1	5	3165,03	2549
1	6	3437,18	3005

Nota-se a partir da tabela 2 que os valores de ω_b e P_{crit} são diferentes para os diferentes modos de vibração apresentados. Para a avaliação do fenômeno de interação modal o objetivo é encontrar uma geometria que forneça a mesma frequência natural e a mesma carga crítica para modos distintos, logo será definido um novo parâmetro de comprimento, L^* .

Então, para se chegar ao novo parâmetro de comprimento, L^* , que descreva a situação desejada, inicialmente deverá ser mantidos todos os parâmetros físicos e geométricos utilizados para

o estudo do acoplamento modal, excetuando-se L .

Em um primeiro momento para o modo (1,5), mantém-se L e ω_b como incógnitas. Adiante, será feita novamente a substituição dos parâmetros físicos e geométrico na equação de equilíbrio (19), porém para o modo (1,6), mantendo-se também L e ω_b como incógnitas. Como o objetivo é obter um L que garanta um mesmo ω_b e P_{crit} para modos distintos, iguala-se ambas as equações obtidas, encontrando-se um novo L igual a 0,34163 m, que será denominado como L^* . A Tabela 3 descreve os valores de ω_b e P_{crit} encontrados a partir da substituição de L^* então obtido:

Tabela 3. Valores da frequência natural e carga crítica para $L^* = 0,34163$ m

m	n	ω_b (rad/s)	P_{crit} (kN)
1	5	3799,02	2679,5
1	6	3799,02	2679,5

A Tabela 3 mostra que a partir da alteração da geometria, foi possível obter uma mesma frequência natural e uma mesma carga crítica, para dois modos de vibração distintos. A mudança no valor do L^* , também gera uma modificação no caminho pós-crítico, as Figuras 3 e 4 mostram o caminho pós-crítico para as soluções modais apresentadas nas equações (15) e (16), respectivamente:

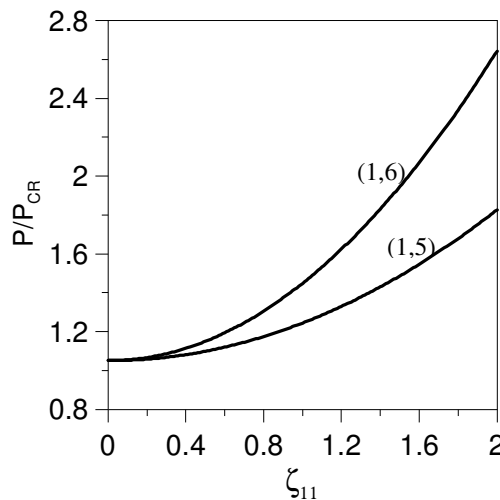


Figura 3. Caminho pós-crítico para 1 G.D.L com L^* .

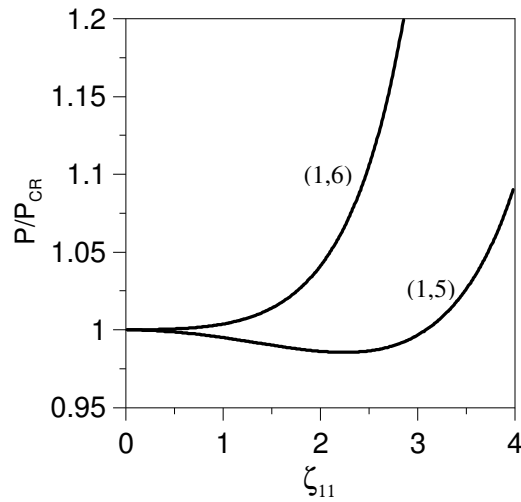


Figura 4. Caminho pós-crítico para 2 G.D.L com L^* .

A Figura 3 mostra que 1 G.D.L não é capaz de demonstrar o real comportamento da casca, mostrando que existe um ganho de rigidez, devido ao aumento da capacidade de carga, logo é feito o acréscimo no número de termos, obtendo assim um resultado próximo do real para 2 G.D.L., representado na Figura 4, onde é possível notar a perda de rigidez sofrida pela casca em ambos os modos de vibração apresentados. Essa análise inicial realizada também corresponde ao acoplamento modal, pois apesar de utilizar de uma nova geometria, o comportamento das soluções de (15) e (16) foi mantido.

Após a alteração na geometria da casca, obtendo-se L^* , é possível determinar a interação modal entre dois modos de vibração, que para o presente trabalho, ocorrerá para os modos (1, 5) e (1, 6), para isso serão obtidas novas soluções modais, através do método da perturbação (Gonçalves *et al.*, 2008), que garanta a interação destes modos em uma única solução. As soluções modais utilizadas são:

$$w = \zeta_{11} h \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(n\theta) + \hat{\zeta}_{11} h \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(N\theta) \quad (20)$$

$$\zeta_{02} h \left[-\frac{3}{4} + \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{4m\pi x}{L}\right) \right]$$

$$\begin{aligned}
w = & \zeta_{11} h \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(n\theta) + \hat{\zeta}_{11} h \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(N\theta) \\
& + \zeta_{02} h \left[-\frac{3}{4} + \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{4m\pi x}{L}\right) \right] \\
& + \zeta_{22} h \left[-\frac{3}{4} + \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{4m\pi x}{L}\right) \right] \cos(2n\theta) \\
& + \hat{\zeta}_{22} h \left[-\frac{3}{4} + \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{4m\pi x}{L}\right) \right] \cos(2N\theta) \\
& + \zeta_{01}^- h \left[-\frac{3}{4} + \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{4m\pi x}{L}\right) \right] \cos[(N-n)\theta] \\
& + \zeta_{01}^+ h \left[-\frac{3}{4} + \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{4m\pi x}{L}\right) \right] \cos[(N+n)\theta]
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
w = & \zeta_{11} h \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(n\theta) + \hat{\zeta}_{11} h \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(N\theta) \\
& + \zeta_{11}^- h \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos[(N-n)\theta] + \zeta_{11}^+ h \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos[(N+n)\theta] \\
& + \zeta_{02} h \left[-\frac{3}{4} + \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{4m\pi x}{L}\right) \right] \\
& + \zeta_{22} h \left[-\frac{3}{4} + \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{4m\pi x}{L}\right) \right] \cos(2n\theta) \\
& + \bar{\zeta}_{22} h \left[-\frac{3}{4} + \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{4m\pi x}{L}\right) \right] \cos(2N\theta) \\
& + \zeta_{01}^- h \left[-\frac{3}{4} + \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{4m\pi x}{L}\right) \right] \cos[(N-n)\theta] \\
& + \zeta_{01}^+ h \left[-\frac{3}{4} + \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{4m\pi x}{L}\right) \right] \cos[(N+n)\theta]
\end{aligned} \tag{22}$$

Como a interação modal será realizada entre os modos de vibração (1,5) e (1,6), os valores de m , n e N serão, respectivamente, iguais a 1, 5 e 6. Nas soluções modais (20), (21) e (23) as condições de contorno apresentadas na equação (18) são atendidas e os parâmetros físicos e geométricos serão mantidos, aplicando nesse caso o L^* obtido.

A partir das novas soluções modais, serão obtidos novos caminhos pós-crítico, que demonstrarão o comportamento de uma casca cilíndrica diante da interação dos modos de vibração (1,5) e (1,6). Esses caminhos pós-crítico estão representados pela Figura 5.

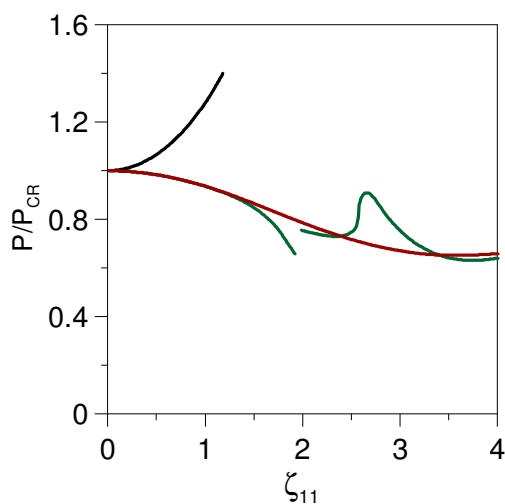


Figura 5. Caminho pós-crítico para as soluções modais (20), (21) e (22), considerando a interação modal.

A Figura 5 mostra os diferentes caminhos pós-crítico, obtidos a partir das diferentes soluções modais, analisados para o fenômeno de interação modal. A curva apresentada em preto, representa a solução modal (20), que mesmo possuindo 3 G.D.L. não é capaz de representar o real comportamento da casca cilíndrica, indicando um aumento de rigidez da casca cilíndrica devido ao aumento na capacidade de carga. Isto se deve ao fato de que dois dos três modos presentes na solução modal (20) são modos fundamentais de flambagem, ζ_{11} e $\hat{\zeta}_{11}$. Essa representação, distante do real, se dá devido a baixa interação realizada entre os modos de vibração (1,5) e (1,6).

Ainda na Figura 5, a curva em verde representa a solução modal (21) com 7 G.D.L., neste caminho pós crítico nota-se uma perda de rigidez na casca cilíndrica em função da perda da capacidade de carga. Essa curva apresenta uma falha devido a instabilidade do método numérico utilizado na solução do sistema de equações (Newton-Raphson). Já a curva em vermelho, referente a solução modal (22) com 9 G.D.L., o caminho pós crítico representa de forma correta o comportamento da casca cilíndrica comprimida, da mesma maneira que a solução modal (21). Em síntese, esse fenômeno corresponde a interação modal entre os modos de vibração (1,5) e (1,6).

4 CONCLUSÃO

Neste trabalho estudam-se os fenômenos de acoplamento modal e interação modal em cascas cilíndricas. Inicialmente são obtidas as equações de equilíbrio e de compatibilidade da casca cilíndrica a partir da teoria não-linear de Donnell para cascas abatidas. Para o estudo do acoplamento modal presente em uma casca cilíndrica axialmente comprimida empregam-se diversas soluções modais, que são determinadas a partir do método da perturbação. A partir dos caminhos pós-críticos

obtidos observa-se que a consideração de diferentes modos levam a comportamentos distintos, indicando o acoplamento modal. Já a para a interação modal, foi obtida uma geometria para a casca cilíndrica que apresentasse dois modos de vibração e/ou de flambagem distintos com a mesma carga crítica e a mesma frequência natural. As soluções modais que descrevem os deslocamentos transversais para o estudo da interação modal devem levar em consideração essa interação modal. Os caminhos pós-críticos obtidos na análise da interação modal descrevem o comportamento não-linear esperado para cascas cilíndricas, porém com uma topologia distinta quando há apenas a consideração do acoplamento modal.

REFERÊNCIAS

BRUSH, D. O., ALMROTH, B. O. **Buckling of bars, plates and shells**. McGraw-Hill, Inc., New York, 1975.

GONÇALVES, P. B.; BATISTA, R. C. Non-linear vibration analysis of fluid-filled cylindrical shells. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 127, p. 133-143, 1988.

GONÇALVES, P. B.; DEL PRADO, Z. J. G. N. Effect of non-linear modal interaction on the dynamic instability of axially excited cylindrical shells. **Computers and Structures**, vol. 82, p. 2621-2634, 2004.

GONÇALVES, P. B.; DEL PRADO, Z. J. G. N. Low-dimensional Galerkin models for nonlinear vibration and instability analysis of cylindrical shells. **Nonlinear Dynamics**, Netherlands, v 41, n. 1-3, p. 129-145, 2005.

GONÇALVES, P. B.; SILVA, F. M. A., DEL PRADO, Z. J. G. N. Low-dimensional models for the nonlinear vibration analysis of cylindrical shells based on a perturbation procedure and proper orthogonal decomposition. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 315, p. 641-663, 2008.

NAYFEH, A. H., **Method of Normal Forms**. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993.

SHAW, S. W., PIERRE, C., Normal modes for nonlinear vibratory systems. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 164, p. 85-124, 1993.

SIROVICH, L., Turbulence and the dynamics of coherent structures part I: coherent structures. **Quarterly of Applied Mathematics**, vol. 45, p. 561-571, 1987a.

SIROVICH, L., Turbulence and the dynamics of coherent structures part II: symmetries and transformations. **Quarterly of Applied Mathematics**, vol. 45, p. 573-582, 1987b.

SIROVICH, L., Turbulence and the dynamics of coherent structures part III: dynamics and scaling. **Quarterly of Applied Mathematics**, vol. 45, p. 583-590, 1987c.