

Uma Curva de G. de Rham: mais propriedades *

Guilherme Henrique de Paula Reis

(e-mail: guilherme.dwg@gmail.com)

Goiânia, 15 de Junho de 2011

Resumo

No trabalho de iniciação científica [2], Uma Curva de G. de Rham, analisamos um caso particular de uma classe de curvas introduzida por Georges de Rham [1]. A curva estudada é obtida através do processo de trisseccção de um quadrado. No trabalho anterior, obtemos uma parametrização desta curva e mostramos que a mesma possui derivada em todos os pontos. Neste trabalho vamos mostrar que a derivada desta curva varia de modo contínuo e obteremos uma expressão desta derivada em termos de frações contínuas. Além disso, mostraremos que esta curva não possui derivada segunda. Daremos uma prova simples de que a curva obtida, contradizendo a intuição, não é um círculo. Essa classe de curvas é estudada na matemática aplicada e na computação gráfica com a necessidade de aproximar objetos suaves (arredondados) por objetos retilíneos. Há também um grande interesse da matemática pura em estudar propriedades dessa curvas e suas possíveis generalizações além do interesse em áreas mais específicas como sistemas dinâmicos .

1 Introdução

Neste trabalho usaremos completamente todos os resultados, definições e notações presentes no trabalho de iniciação científica realizado no período 2009/2010. Aqui damos continuidade ao referido trabalho demonstrando algumas propriedades interessantes a respeito da curva limite obtida pelo processo de trisseccção.

*IME/UFG, Campus II- Caixa Postal 131, CEP 74001-970 - Goiânia, GO, Brasil. Relatório de Iniciação Científica orientado pelo Professor Ronaldo Alves Garcia (e-mail:ragarcia@mat.ufg.br).

2 Continuidade e Expressão da Derivada da Curva C

Nesta seção provaremos que a função $m: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada ponto $t \in [0, 1]$ a inclinação da reta tangente à curva C no ponto $M(t)$ da curva C é uma função contínua do parâmetro t . Também obteremos uma expressão para esta inclinação em frações contínuas.

Proposição 2.1. *A função $m: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.*

Demonstração. Pela proposição 3.9 de [2], dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica que a tangente do ângulo formado por dois lados consecutivos de P_n é menor que ε . Tome $\delta = \frac{1}{2^{n_0}}$. Dados $x, y \in [0, 1]$ temos que $|x - y| < \delta$ implica que $M(x)$ e $M(y)$ estão entre dois vértices consecutivos de Q_n com $n \geq n_0$. Pela convexidade da curva C segue que $|m(x) - m(y)| < \varepsilon$. \square

Agora, obteremos uma expressão em frações contínuas para a inclinação da reta tangente à curva C .

Seja t um número real do intervalo $[0, 1]$. Então t possui uma representação na base 2. Isto é, existem $a_i \in \{0, 1\}$ tal que

$$t = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

Separaremos a representação binária de t em blocos de dígitos 0's e em blocos de dígitos 1's como abaixo

$$t = 0, \underbrace{11 \dots 1}_{k_1 \text{ vezes}} \underbrace{00 \dots 0}_{k_2 \text{ vezes}} \underbrace{11 \dots 1}_{k_3 \text{ vezes}} \underbrace{00 \dots 0}_{k_4 \text{ vezes}} 11 \dots$$

podendo ser $k_1 = 0$.

Da fórmula $x + \dots + x^n = \frac{x}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$ colocamos

$$s_1 = \sum_{i=1}^{k_1} \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^{k_1+1}} = 1 - \frac{1}{2^{k_1}} = 0, \underbrace{11 \dots 1}_{k_1 \text{ vezes}}$$

Daí, $t = s_1 + (t - s_1)$ implica que

$$t = 1 - \frac{1}{2^{k_1}} + 0, \underbrace{00 \dots 0}_{k_1+k_2} \underbrace{11 \dots 1}_{k_3} \underbrace{00 \dots 0}_{k_4} 11 \dots$$

Pondo $s_2 = 0, \underbrace{00 \dots 0}_{k_1+k_2} \underbrace{11 \dots 1}_{k_3}$ temos que

$$s_2 = \sum_{j=k_1+k_2+1}^{k_1+k_2+k_3} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k_1+k_2}} \sum_{i=1}^{k_3} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{k_1+k_2}} \left(1 - \frac{1}{2^{k_3}} \right) = \frac{1}{2^{k_1+k_2}} - \frac{1}{2^{k_1+k_2+k_3}}$$

Logo,

$$t = 1 - \frac{1}{2^{k_1}} + \frac{1}{2^{k_1+k_2}} - \frac{1}{2^{k_1+k_2+k_3}} + 0, \underbrace{00000 \dots 000}_{k_1+k_2+k_3+k_4} \underbrace{11 \dots 1}_{k_5} 00 \dots$$

Consequentemente,

$$t = 1 - \frac{1}{2^{k_1}} + \frac{1}{2^{k_1+k_2}} - \frac{1}{2^{k_1+k_2+k_3}} + \frac{1}{2^{k_1+k_2+k_3+k_4}} - \dots$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^{(\sum_{j=1}^i k_j)}} \quad (*)$$

No que se segue, denotaremos a fração contínua

$$a = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}$$

por

$$a = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, \dots \rangle$$

Teorema 2.1. Se o parâmetro t é dado pelo desenvolvimento em (*), então denotando por $\frac{B_n}{A_n} = \langle k_1, k_2, \dots, k_n \rangle$ e convencionando que $A_0=0$, $A_{-1}=1$, $B_0=1$ e $B_{-1}=0$ temos que o coeficiente angular $m(t)$ da tangente à curva limite C no ponto $M(t)$ é dada pela fração contínua $m(t) = \langle k_1, k_2, k_3, \dots \rangle$.

Demonstração. Sejam $t_0 = 1$ e $t_{-1} = 0$ e $t_n = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{2^{\sum_{j=1}^i k_j}}$. Afiramos que o coeficiente angular $m(t_n)$ da reta tangente à curva limite C no ponto $M(t_n)$ é igual a

$$m(t_n) = \frac{B_n}{A_n}.$$

A prova desta afirmação será por indução sobre n . Para $n = -1$, a tangente no ponto $M(t_{-1}) = M(0)$ é dada por $m(0) = \frac{B_{-1}}{A_{-1}} = \frac{0}{1}$ como de fato o é pela proposição 3.11 de [2]. A afirmação também é verdadeira para $n = 0$ pois $t_0 = 1$ e a tangente no ponto $M(1)$ é dada por $m(1) = \frac{B_0}{A_0} = \frac{1}{0}$.

Suponhamos, por hipótese de indução, que a fórmula é verdadeira para $1, 2, \dots, n-1$. Queremos provar que ela é verdadeira para n . Por hipótese,

$$m(t_{n-2}) = \frac{B_{n-2}}{A_{n-2}} \quad e \quad m(t_{n-1}) = \frac{B_{n-1}}{A_{n-1}}.$$

Para abreviar, pomos $k = k_1 + \dots + k_{n-1}$. Temos que

$$t_{n-1} = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^i}{2^{\sum_{j=1}^i k_j}} \quad e \quad t_{n-2} = 1 + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{(-1)^i}{2^{\sum_{j=1}^i k_j}}$$

multiplicando ambas as equações por 2^k temos

$$2^k t_{n-1} = 2^k + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i 2^{k - \sum_{j=1}^i k_j}$$

e

$$2^k t_{n-2} = 2^k + \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^i 2^{k - \sum_{j=1}^i k_j}.$$

Portanto, $2^k t_{n-1}$ e $2^k t_{n-2}$ são números inteiros pois $k - \sum_{j=1}^i k_j \geq 0$. Além disso, $2^k t_{n-1} - 2^k t_{n-2} = (-1)^{n-1}$. Logo, $M(t_{n-1})$ e $M(t_{n-2})$ são vértices consecutivos de Q_k e $M(t_{n-1})$ precede ou sucede $M(t_{n-2})$ conforme n seja ímpar ou par, respectivamente. Por outro lado, $t_n = t_{n-1} + \frac{(-1)^n}{2^{k+k_n}}$ donde $2^{k+k_n} t_n - 2^{k+k_n} t_{n-1} = (-1)^n$. Logo, $M(t_n)$ e $M(t_{n-1})$ são vértices consecutivos de Q_{k+k_n} e $M(t_n)$ precede ou sucede $M(t_{n-1})$ conforme n seja par ou ímpar, respectivamente. Assim, em todo caso, $M(t_n)$ está entre $M(t_{n-1})$ e $M(t_{n-2})$ e $M(t_{n-1})$ e $M(t_n)$ são vértices consecutivos de Q_{k+k_n} .

Pelas propriedades da sequência de Brocot estabelecidas anteriormente, nós temos que $m(t_n)$ é obtido através de $m(t_{n-1})$ e $m(t_{n-2})$ através de somas sucessivas no sentido aritmético dos coeficientes angulares. Como $m(t_{n-1})$ e $m(t_n)$ são termos vizinhos da sequência B_{k+k_n} segue que essas somas são:

$$\frac{B_{n-1} + B_{n-2}}{A_{n-1} + A_{n-2}}, \quad \frac{2B_{n-1} + B_{n-2}}{2A_{n-1} + A_{n-2}}, \quad \dots, \quad \frac{k_n B_{n-1} + B_{n-2}}{k_n A_{n-1} + A_{n-2}}$$

de modo que

$$m(t_n) = \frac{k_n B_{n-1} + B_{n-2}}{k_n A_{n-1} + A_{n-2}}.$$

Pelas propriedades de construção das frações contínuas [3] segue que

$$B_n = k_n B_{n-1} + B_{n-2} \quad e \quad A_n = k_n A_{n-1} + A_{n-2}$$

e assim a afirmação é verdadeira.

Para o caso geral, se t é um número diádico então o densenvolvimento em (*) é finito e assim o teorema é verdadeiro pela afirmação anterior. Se t não é um número diádico então $t = \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n$. Pela continuidade da derivada da curva C temos que $m(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} m(t_n)$. Logo,

$$m(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} m(t_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{B_n}{A_n} = \langle k_1, k_2, k_3, \dots \rangle$$

como queríamos demonstrar. □

3 A Curva C Não é um Círculo

Durante o desenvolvimento desse trabalho apresentei e discuti o processo de trisseção com inúmeras pessoas. Em todos as pessoas, incluindo eu mesmo, no primeiro contato, as pessoas intuíram que a curva C é um círculo. Contrariando a intuição de todos mostraremos nesta seção um argumento bem simples mostrando que a curva C não é um círculo.

Sabemos da proposição 2.6 de [2] que os pontos médios de cada lado de P_n pertencem à curva limite C . Assim, os pontos C, D e G do polígono P_1 na figura abaixo pertencem à curva C .

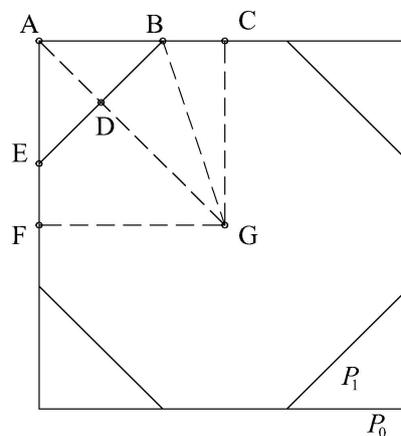


Figura 1: A curva C não é um círculo.

Por outro lado, supondo que a curva C é um círculo teremos que o ponto G é o seu centro. Isto segue do fato de que os pontos médios dos lados de P_0 pertencerem à curva C . Agora, observe que o ângulo \widehat{GDB} é reto. De fato, o segmento \overline{DG} é a mediana do triângulo de vértices B, E e G que é isóceles. Evidentemente, o ângulo \widehat{GCB} é reto. Agora, observe que os triângulos $\triangle DBG$ e $\triangle CBG$ são retângulos, tem um lado em comum e, da hipótese de C ser um círculo, os lados \overline{DG} e \overline{CG} tem comprimentos iguais. Então estes triângulos são congruentes. Mas isto implica que o triângulo $\triangle ABF$ é equilátero. Uma contradição visto que o ângulo \widehat{FAB} é reto. Logo, a curva C não é um círculo.

4 A Curva C Não Possui Derivada Segunda

Até este momento mostramos que a curva C possui derivada em todos os pontos e que a derivada varia de modo contínuo. Isto é, a curva C é de classe C^1 . Apesar de sabermos que a curva C não é um círculo, caberia indagar se esta curva é de classe C^k com $k > 1$ ou mesmo, para os mais otimistas, se esta curva é de classe C^∞ ou analítica. No entanto, mostraremos que esta não possui derivada segunda em alguns dos seus pontos.

Considere a transformação linear $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $S(x, y) = \left(\frac{x+y}{3}, \frac{y}{3} \right)$. Sabemos que S é linear e leva conjunto convexo em conjunto convexo. Em particular, S leva segmento de reta em segmento de reta. Observe que na base canônica de \mathbb{R}^2 a matriz da aplicação linear S é dada por

$$S = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

de modo que na base canônica a aplicação S iterada n vezes $S^n: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tem como matriz

$$S^n = \begin{bmatrix} 1/3^n & n/3^n \\ 0 & 1/3^n \end{bmatrix}$$

Assim, enunciamos a

Proposição 4.1. *A transformação linear S^n leva o triângulo de ordem 0 no triângulo de ordem n cujo um dos vértices é o ponto M_0 .*

Demonstração. A prova será por indução sobre n . Para $n = 1$ temos que os triângulos de ordem 0 e de ordem 1 são dados como na figura 2.

Ora, $S(0, 0) = (0, 0)$, $S(1, 1) = (2/3, 1/3)$ e $S(1, 0) = (1/3, 0)$ de modo que o segmento de reta que une os pontos M_1 e Y é levado no segmento que une os pontos $M(1/2)$ e X . Observe que esta relação permanece para os respectivos segmentos de cada triângulo. Assim, S leva o triângulo de vértice M_0 , Y e M_1 no triângulo de vértices M_0 , X e $M(1/2)$. Assim, a afirmação é verdadeira para $n = 1$.

Suponhamos, por hipótese de indução que a afirmação é verdadeira para n . Assim, os vértices do triângulo de ordem n que contém M_0 são dados por $S^n(0, 0) = (0, 0)$, $S^n(1, 1) = ((1+n)/3^n, 1/3^n)$ e $S^n(1, 0) = (1/3^n, 0)$ como na figura 3. A partir do triângulo n podemos, através do processo de trisseção, construir o triângulo de ordem $n+1$.

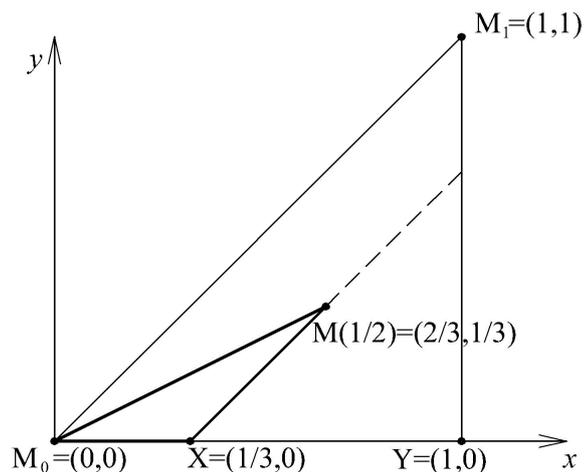


Figura 2: Triângulos de ordem 0 e 1.

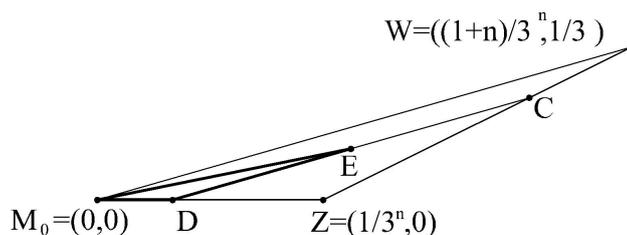


Figura 3: Os triângulos de ordem n e $n+1$.

Considere o segmento de origem em W e ponto final em Z parametrizado por $(1-t)((1+n)/3^n, 1/3^n) + t(1/3^n, 0)$ com $t \in [0, 1]$. Então o ponto C é obtido com $t = 1/3$, i.e, $C = ((3+2n)/3^{n+1}, 2/3^{n+1})$. Além disso, $D = (1/3^{n+1}, 0)$. Como E é o ponto médio do segmento de extremos C e D temos que $E = ((2+n)/3^{n+1}, 1/3^{n+1})$.

Por outro lado, $S((1+n)/3^n, 1/3^n) = ((2+n)/3^{n+1}, 1/3^{n+1}) = S^{n+1}(1, 1)$ e $S(1/3^n, 0) = (1/3^{n+1}, 0) = S^{n+1}(1/3, 0)$. Ou seja, S^{n+1} leva o triângulo de ordem 0 que contém M_0 no triângulo de ordem $n+1$ que contém M_0 . Pelo princípio de indução, a afirmação é verdadeira para todo n . □

Através da sequência $(S^n(1, 1))_{n \in \mathbb{N}}$ mostraremos que o raio de curvatura da curva C no ponto $M_0 = (0, 0)$ é zero.

Considere o único círculo L_n que contém os pontos $M_0, ((1+n)/3^n, 1/3^n) \in C$ e que é tangente à reta tangente no ponto M_0 . Observe que esta reta tangente coincide com o eixo x . Assim, o centro deste círculo está no eixo y e é da forma $(0, R_n)$ onde R_n é o seu raio.

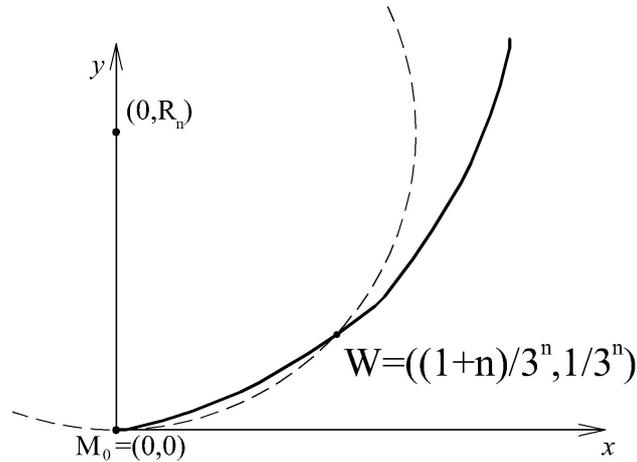


Figura 4: O círculo L_n .

Disto temos que R_n satisfaz

$$\left(\frac{1+n}{3^n}\right)^2 + \left(R_n - \frac{1}{3^n}\right)^2 = R_n^2$$

daí temos que

$$R_n = \frac{n^2 + 2n + 1}{2 \cdot 3^n} + \frac{1}{2 \cdot 3^n}$$

e então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$$

Fazendo n tender a $+\infty$ temos que L_n tende ao círculo osculador de C no ponto M_0 . Assim, o raio de curvatura de C no ponto M_0 é igual 0. Mostrando que C possui curvatura igual a $+\infty$ no ponto M_0 . Consequentemente, a curva C não possui derivada segunda neste ponto. Pois, do contrário, a curvatura teria uma expressão em termos das derivadas de C e então seria finita.

5 Conclusão

Mostramos que a curva limite C obtida através do processo de trisseção de um quadrado possui derivada contínua em todos os pontos e que não possui derivadas de ordens superiores. Obtemos uma expressão para a derivada em termos de frações contínuas e mostramos que a curva C não é um círculo.

Referências

- [1] Georges de Rham, *Un peu de mathématiques à propos d'une courbe plane*, Revue de Mathématiques Élémentaires, II 1947: 4,5, 678-689.
- [2] Guilherme Henrique de Paula Reis, *Uma Curva de G. de Rham*, Trabalho de Iniciação Científica UFG 2009/2010.
- [3] C. G. T. A. Moreira, *Frações contínuas, representação de números e aproximações*, Revista Eureka, número 3, 44-55 (1998).
- [4] J. R. Munkres, *Topology*, 2nd, Prentice Hall.
- [5] E. L. Lima, *Curso de Análise vol. 1*, 12ed., Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, (2009).